PRIMER PARCIAL DE ANÁLISIS MATEMÁTICO II

TEÓRICO 1: a) Defina solución de una ecuación diferencial.

b) En base a lo respondido en el ítem a), justifique si $f(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$, es solución de la ecuación: $x'' + \frac{k}{m}x = 0 \quad k, m \in \mathbb{R}$ (oscilador armónico simple).

TEÓRICO 2: a) Enuncie el teorema de la función implícita para un campo escalar en $\mathbb{R}^n$.

b) Muestre que $F(x,y,z) = xyz + ln(xyz) - z$, satisface las hipótesis del teorema, en el punto $P_0 = (1,1,1)$, pudiendo definir $z = f(x,y)$; y calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

PRÁCTICO 1: Calcule los siguientes límites, en caso de que existan

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x+y}{x+y}$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

PRÁCTICO 2: Encuentre la solución particular de $y' = xy - 7x$, que pasa por $(1,8)$

PRÁCTICO 3: Obtenga la ecuación del plano tangente a $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,z_0)$.

PRÁCTICO 4: Analice la existencia de extremos y puntos silla de $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy^2$

Prof. Martín Moyano

AM 2 UTN.	1° parcial (primer parcial en blanco)	HOJA N° 1 / FECHA

1) a) Defina solución de una ecuación diferencial

Es una función que, al reemplazar a la función incógnita, en cada caso con las deriv. correspondientes, verifica la ecuación diferencial dada.

Sol. gral: es una relación entre las variables que satisface la ecuación y tiene constantes arbitrarias.

Sol. particular: es una solución que no contiene constantes arbitrarias.

b) En base a lo respondido en el ítem a), justifique si $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ es solución de la ec. $x'' + \frac{k}{m}x = 0$ (oscilador armónico simple) PRIMER

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x' = -A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)\,\omega$$

$$\Rightarrow x'' = -A\cos(\omega t + \varphi)\,\omega^2$$

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$$

$$-A\cos(\omega t + \varphi)\,\omega^2 + \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = 0 \checkmark$$

$\boxed{\text{Verdadero}}$

NOTA

72) a) Enuncie el teorema de la función implícita para un campo escalar en $\mathbb{R}^n$

Tenemos una función implícita cuando una variable dependiente no se muestra en forma explícita sino expresada a través de otra/s

Sea $F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2, ... x_n, w)$ y $\bar{A} = (a_1, a_2, ... a_n, b)$.

hipótesis: $F \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$, $F(\bar{A}) = 0$, $F'_{w(A)} \neq 0$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces $w = f(x_1, x_2, ... x_n)$ está definida en forma implícita

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_w} \qquad i \in [1, n]$$

b) Muestre que $F(x,y,z) = xyz + \ln(xyz) - 1$ satisface las hip. del teorema en el punto $P_0 = (1,1,1)$ pudiendo definir $z = f(x,y)$ y calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

- F es suma algebraica de func. elementales $\Rightarrow F \in C^1$ ✓
- $F(P_0) = F(1,1,1) = 1 \times 1 \times 1 + \ln(1 \times 1 \times 1) - 1 = 0$ ✓
- $F'_{z(x,y,z)} = xy + \frac{xy}{xyz} - 1 \Rightarrow F'_{z(1,1,1)} = 1+1-1 = 1 \neq 0$ ✓

Se cumplen las hip. del t. de la función implícita ∴

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{F'_y(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)}$$

$$F'_x(x,y,z) = yz + \frac{yz}{xyz} \to F'_x(1,1,1) = 2$$

$$F'_y(x,y,z) = xz + \frac{xz}{xyz} \to F'_y(1,1,1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{2}{1} = \boxed{2 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{2}{1} = \boxed{2 = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}$$

NOTA

AM II UTN	1° parcial	HOJA N° 2/ FECHA

P1 Calcule los límites, en caso de que existan

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy - x + y}{x+y} \underset{\text{por } x=0}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0+y}{0+y} = 1$

$\underset{\text{por } y=x}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xx - x + x}{x+x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{2x} = 0$

$\neq$ $\boxed{\nexists \lim}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x y^2}{x^2+y^4} \xrightarrow{\text{por } x=y^2} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 y^2}{y^4+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2}$

$\xrightarrow{\text{por } y=0} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0}{x^2} = 0$

$\neq$ $\boxed{\nexists \lim}$

✓ **P2** Encuentre la sol. part. de $y' = xy - 7x$ que pase por $(1,8)$

$y' = xy - 7x = x\,(y-7) = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow x\,dx = \dfrac{dy}{y-7}$

integro m. a m. $\quad \ln(y-7) = \dfrac{x^2}{2} + c \qquad c, k \in \mathbb{R}$

$y - 7 = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^{\frac{x^2}{2}}.k$

$\boxed{y = e^{\frac{x^2}{2}}.k + 7}$ Sol. gral

Pasa por $(1,8) \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=8$

$8 = e^{\frac{1^2}{2}}.k + 7$

$1 = e^{1/2}.k \Rightarrow k = \dfrac{1}{e^{1/2}} = \boxed{e^{-1/2} = k}$

$y = e^{\frac{x^2}{2}}.e^{-\frac{1}{2}} + 7$

$\boxed{y = e^{\frac{x^2-1}{2}} + 7}$

NOTA

P3 Obtenga la ecuación del plano tangente a $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 1, z_0) = P$

$$z_0 = f(1,1) = 4 - 1 - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{P = (1,1,2)}$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = -2x \longrightarrow f'_x(1,1) = -2 \\ f'_y(x,y) = -2y \longrightarrow f'_y(1,1) = -2 \end{cases}$$

Plano tg.

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1)$$

$$z = 2 - 2(x-1) - 2(y-1) = 2 - 2x + 2 - 2y + 2$$

$$\boxed{z = -2x - 2y + 6}$$

P4 Analice la existencia de extremos y puntos sillas de $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy^2$

Hallo (x,y) / $\bar{\nabla} f(x,y) = \bar{0}$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - y^2 = 0 \\ f'_y = 2y - 2xy = 0 \end{cases} = \underbrace{2y(1-x)}_{\boxed{y=0 \ \vee \ x=1}}$$

$\boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=0}$ $\boxed{PC_1 = (0,0)}$

$\boxed{x=1} \Rightarrow 3 = y^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{3}$

$$\boxed{\begin{matrix} PC_2 = (1, \sqrt{3}) \\ PC_3 = (1, -\sqrt{3}) \end{matrix}}$$

Hallo el hessiano

$$\left.\begin{matrix} f''_{xx} = 6x \\ f''_{xy} = -2y \\ f''_{yy} = 2 - 2x \end{matrix}\right\} H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & 2-2x \end{pmatrix}$$

$$H_{f(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\text{el criterio no decide}}{|H_{(0,0)}| = 0} \qquad \left.\begin{matrix} f(0{,}001; 0) = 0{,}001^3 \\ f(-0{,}001; 0) = -0{,}001^3 \end{matrix}\right\} (0, 0, f(0,0)) \text{ es punto silla}$$

$$\left.\begin{matrix} Hf(1,\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |H(1,\sqrt{3})| = -12 \\ Hf(1,-\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |H(1,-\sqrt{3})| = -12 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} (1, \sqrt{3}, f(1,\sqrt{3})) \text{ y} \\ (1, -\sqrt{3}, f(1,-\sqrt{3})) \\ \text{son Puntos silla} \end{matrix}$$

NOTA